

2021 年 11 月 7 日

ケプラー「新天文学」第1部における 比・三角法の扱い

大阪工業大学 北 秀和

1 ヨハネス・ケプラー (1571-1630)

・天文学者、数学者

1596 「宇宙の神秘」コペルニクス(1473-1543)を支持
ガリレオ(1564-1642)が、この本を支持し手紙を送る

1599 ティコ・ブラーエ(1546-1601 天空観測の権威)
の助手

ブラーエの死後、彼の16年間の観測記録を整理分析

1609 「新天文学」 ケプラーの法則(第1、第2)

1612 「宇宙の調和」 ケプラーの法則(第3)

1627 「ルドルフ表」天文表 従来の30倍の精度

1 ヨハネス・ケプラー（1571-1630）（2）

数学的なモデル提出の先駆者→ニュートン(1642-1727)

第一法則 「楕円軌道の法則」

惑星の運動を歪んだ円もしくは楕円

第二法則 「面積速度一定の法則」

一つの惑星について惑星と太陽とを結ぶ直線（動径）は、一定時間に常に同じ面積を描く。

第三法則 「調和の法則」

惑星の太陽からの平均距離の3乗と公転周期の2乗の比は一定

2 ケプラーの時代の三角法の状況

Rheticus Opus Palatinum De Triangulis 1596

オットー(1545-1603)により完成された

レティクスの三角法の表

(レティクスの最終資料を使わず、不完全)

レティクス (1514-1574)

コペルニクス(1473-1543)の弟子

15桁の三角法の数表作成

Thesaurus mathematicus 1613

Rheticus Opus Palatinum De Triangulisの改訂版

ピチスキスにより、オットー死後に発見された

レティクス最終資料(15桁)にもとづき改訂。

2 ケプラーの時代の三角法の状況(2)

ピチスクス (1561-1613)

フリードリヒ選帝侯のお抱え牧師、一廉の数学者

レティクスの三角法の表を完成

10桁以上の精度、20世紀初頭でも

天文学計算に使用できるほどのもの

0° 、 90° 近くでこの精度を出すには、

15桁の計算が必要。

斜辺 10000.00000.0000 の直角三角形における

垂辺、底辺の長さの表で、

垂辺/斜辺等の比の値の表ではない

(Danielson(2) 日本語訳 p.251)

2 ケプラーの時代の三角法の状況(3)

① 15桁の正弦・余弦(30° 0分0秒から10秒刻)

● Sinus, Sinus complementi, Diff I, II, III

182									
CANON				SINUUM					
30	Sinus	Diff. I.	II.	III.	Sinus complementi	Diff. I.	II.	III.	
0	50000.00000.00000	41985508767	1175222	98	86602.54037.84438	24239666274	2035544	56	60
10	50004.19855.08767	41984333447	1175320	99	86600.11620.82620	24241701818	2035486	58	50
20	50008.39698.42214	41983158028	1175419	99	86597.69183.45316	24243737304	2035430	56	40
30	50012.59530.00242	41981982510	1175518	97	86595.26725.72582	24245772734	2035371	59	30
40	50016.79349.82752	41980806895	1175615	102	86592.84247.64477	24247808105	2035317	54	20
50	50020.99157.89647	41979631178	1175717	94	86590.41749.21055	24249843422	2035258	59	10
1	50025.18954.20825	41978455367	1175811	102	86587.99230.42375	24251878680	2035201	57	59
10	50029.38738.76192	41977279454	1175913	99	86585.56691.28424	24253913881	2035145	56	50
20	50033.58511.55646	41976103442	1176012	97	86583.14131.79468	24255949026	2035087	58	40
30	50037.78272.59088	41974927333	1176109	100	86580.71551.95355	24257984113	2035031	56	30
40	50041.98021.86421	41973751124	1176209	97	86578.28951.76211	24260019144	2034973	58	20
50	50046.17759.37545	41972574818	1176306	100	86575.86331.22094	24262054117	2034916	57	10
2	50050.37485.12363	41971398412	1176406	98	86573.43690.33061	24264089033	2034860	56	58
10	50054.57199.10775	41970221908	1176504	97	86571.01029.09168	24266123893	2034802	58	50
20	50058.76901.32683	41969045307	1176601	105	86568.58347.50473	24268158695	2034745	57	40
30	50062.96591.77990	41967868601	1176706	91	86566.15645.57033	24270193440	2034688	57	30
40	50067.16270.46591	41966691804	1176797	103	86563.72923.28905	24272228128	2034632	56	20
50	50071.35937.38395	41965514904	1176900	97	86561.30180.66145	24274262760	2034574	58	10

2 ケプラーの時代の三角法の状況(4)

① 15桁の正弦・余弦(30° 10分0秒から10秒刻)

● AD RADIVM 1.00000.00000.00000.

183

AD RADIVM

1.00000.00000.00000.

30

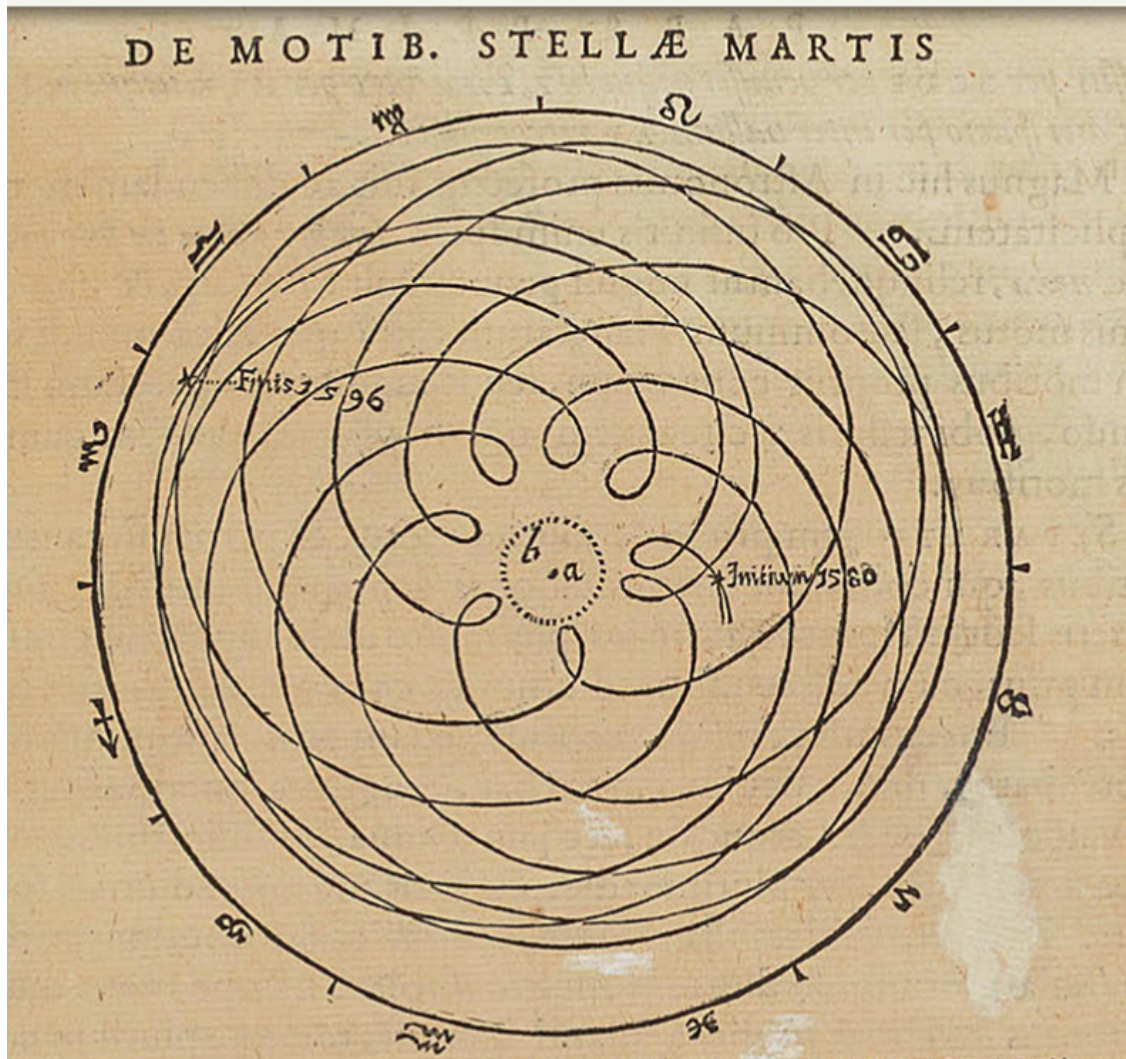
	Sinus	Diff. I.	II.	III.	Sinus complementi	Diff. I.	II.	III.	
10	50251.70468.33709	41914814982	1181138	98	86456.73008.16730	24361697861	2032118	54	50
10	50255.89616.48691	41913633746	1181236	99	86454.29370.86751	24363719979	2032057	61	50
20	50260.08752.82437	41912451411	1181335	97	86451.85713.24715	24365762036	2031903	54	40
30	50264.27877.34848	41911270979	1181432	101	86449.42035.30676	24367794039	2031944	59	30
40	50268.46990.05827	41910089446	1181532	96	86446.98337.04693	24369825983	2031888	56	20
50	50272.66090.95273	41908907817	1181629	102	86444.54618.46822	24371857871	2031829	59	10
11	50276.85180.03090	41907726086	1181731	99	86442.10879.57122	24373889700	2031772	57	49
10	50281.04257.29176	41906544261	1181825	102	86439.67120.35650	24375921472	2031716	56	50
20	50285.23322.73437	41905362334	1181927	97	86437.23340.82462	24377953188	2031658	58	40
30	50289.42376.35771	41904180310	1182024	99	86434.79540.97616	24379984846	2031600	58	30
40	50293.61418.16081	41902998187	1182123	98	86432.35720.81170	24382016446	2031545	55	20
50	50297.80448.14268	41901815966	1182221	99	86429.91880.33179	24384047991	2031484	61	10
12	50301.99466.30234	41900633646	1182320	98	86427.48019.53704	24386079475	2031430	54	48
10	50306.18472.63880	41899451228	1182418	99	86425.04138.42799	24388110905	2031370	60	50
20	50310.37467.15108	41898268711	1182517	97	86422.60237.00524	24390142275	2031316	54	40
30	50314.56449.83819	41897086097	1182614	101	86420.16315.26933	24392173591	2031255	61	30
40	50318.75420.69916	41895903382	1182715	97	86417.72373.22087	24394204846	2031200	55	20
50	50322.94379.73298	41894720570	1182812	98	86415.28410.86041	24396236046	2031142	58	10

3 ティコ・ブラーエを継承

ティコ・ブラーエ（1546-1601）の火星軌道の研究を継承
合・衝における大きさの比較から、
地球との相対的距離を求め、
天球上にの軌道面に描く
仮説を立てて、火星の位置を計算し、
実測との比較で、仮説の妥当性を検討
→数学的モデルの提出
仮説として、
プトレマイオス、コペルニクスのもものを取り上げ、
それぞれの数学的モデルを構成し、比較検討

3 ティコ・ブラーエを継承(2)

① 牡羊座が5時、獅子座が1時辺



4 「新天文学」 第 1 部での比・三角法

ケプラーも

比では、比の値を用いない。

三角法では、 $\sin = \text{対辺} / \text{斜辺}$ などの比の値を使用せず、
図形における比例により表現している。

新天文学では、

斜辺 100000 の直角三角形を想定し、

垂辺、底辺の長さを、それぞれ正弦、余弦、

底辺 100000 の直角三角形を想定し

垂辺、斜辺の長さを、それぞれ正接、正割

とよんでいる。

5 「新天文学」 第 1 部での比の用例

9 用法 17 例 20 か所

【比の構成→惑星軌道の設定】(第 5 例-4 章)

【相似→4 項比例】(7-4)

【4 項比例】(1-1) (2-2) (3-4)

【4 項比例→1 項】(7-4) (1 3-5) (1 9-6)

【4 項比例→内分】(1 2-5) (1 3-5) (1 6-5) (1 8-6)
(2 0-6) (2 3-6)

【4 項比例→項の大小】(1 1-5) (1 7-6)

【4 項比例→比の大小】(1 1-5) (2 1-6)

【比の大小→離心円の検討】(2 2-6)

【速さの比を倍で表現】(4-4)

5 「新天文学」 第 1 部比の用例(2)

① 【相似→4項比例】【4項比例→1項】(7-1)

EB が 100000、BA が 12600 だから、その差は 87400 で、
これを半径 [100000] に掛けて
[EB と BA の] 総和の 112600 で割ると 77620 が得られる。

② 【4項比例→内分】(1 2-5)

離心円の中心を β から直線 $\delta \gamma$ 上に移し替えて
 $\delta \theta$ 対 $\theta \gamma$ が $\alpha \beta$ 対 $\beta \gamma$ になるようにして、
 θ を離心円の中心としたら、どうなるだろうか。

6 「新天文学」 第 1 部での三角法の用例

15 用法 8 用例 32 か所、内、正弦等明示は 9 用法 5 用例 14 か所

- ・ 正弦

【4 項比例形正弦定理→正弦】（ 6 例-4 章）（ 7 -4）（ 1 0 -4）

【4 項比例形正弦定理→辺】（ 1 9 -6）（ 1 9 -6）

【正弦 4 項比例→高】（ 1 4 -5）（ 1 9 -6）

【正弦→高】（ 8 -4）（ 9 -4）（ 9 -4） 【角→正弦】（ 7 -4）

【正弦→角】（ 6 -4）（ 7 -4）（ 9 -4）（ 1 9 -6）

- ・ 余弦

【余弦 4 項比例→底辺】（ 1 4 -5）（ 1 9 -6）

【正割 4 項比例→斜辺】（ 1 0 -4）

- ・ 正弦余弦混合

【正弦・余弦→二辺挟角を直角三角形】（ 1 9 -6）（ 1 9 -6）

6 「新天文学」 第 1 部三角法の用例(2)

- ・ 正接

【斜辺 100000 の直角三角形→正接】（第 9 例-4 章）

【正接 4 項比例→正接】（8-4）

【正接 4 項比例→高】（7-4）（9-4）

【正接 4 項比例→角】（1 5-5）（1 5-5）

【角→正接】（7-4）

【正接→角】（7-4）（8-4）（9-4）（9-4）（1 9-6）

- ・ 以上のうち、正弦・正接・正割を明示（余弦なし）

正弦（6-4）（6-4）（7-4）（7-4）（8-4）（9-4）（1 0-4）（1 0-4）

正接（7-4）（7-4）（8-4）（9-4）（9-4）

正割（1 0-4）

6 「新天文学」 第 1 部三角法の用例(3)

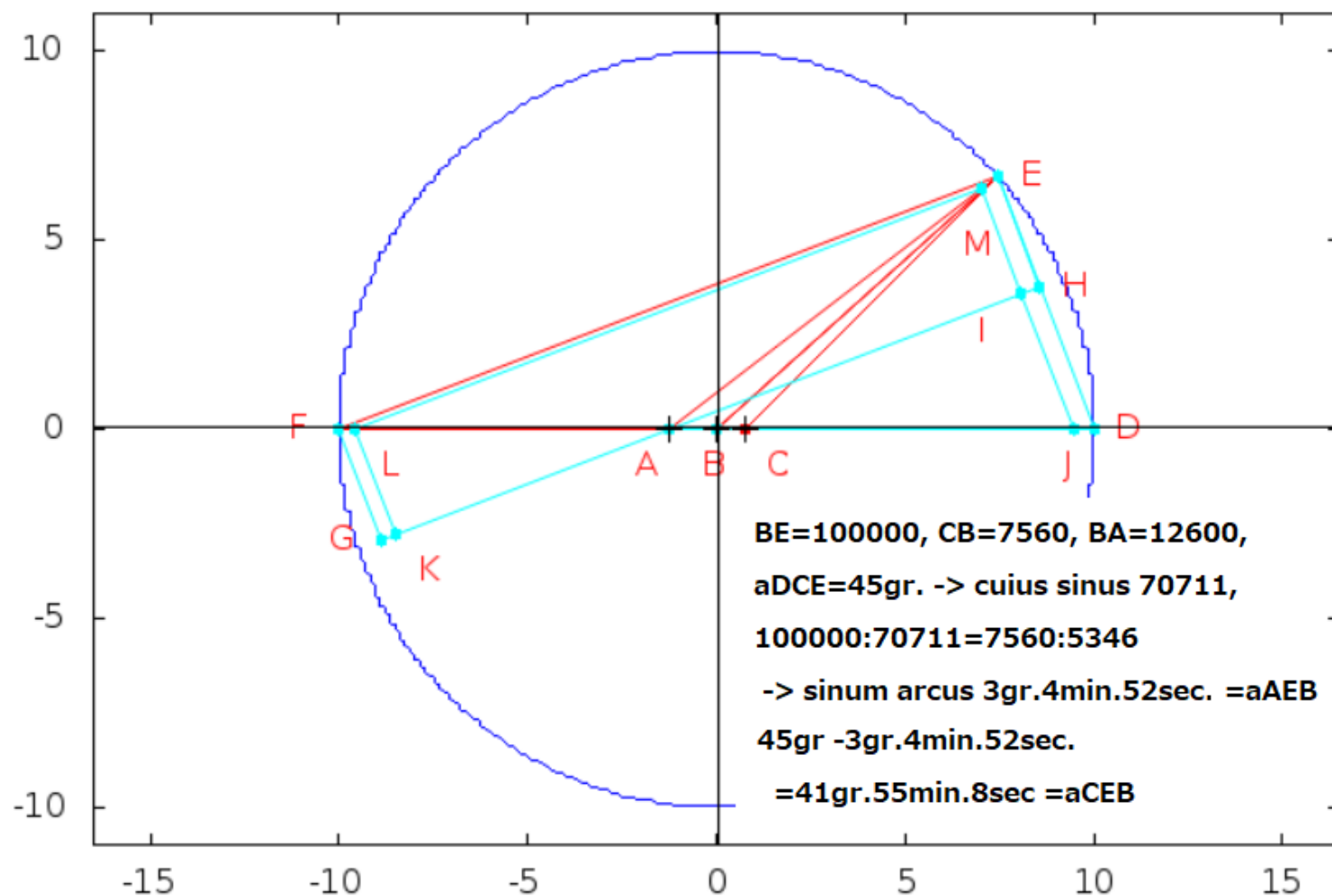
① 【角→正弦】【4項比例形の正弦定理→正弦】【正弦→角】 (7-4)

BE を 100000 ・ ・ ・ CB は 7560、BA は 12600 ・ ・ ・ 角 DCE を 45° とすると、その正弦は 70711 である【角→正弦】。 ・ ・ ・ 100000 対 70711 は 7560 対 5346 となる【4項比例形の正弦定理→正弦】が、その逆正弦(アークサイン)は $3^\circ 4'52''$ で【正弦→角】、これが角 CEB である。

6 「新天文学」 第1部三角法の用例(4)

① $BE:\sin(ECB)=BC:\sin(CEB)$

$BE=AI=100000$



6 「新天文学」 第1部三角法の用例(5)

- ① 100000 ad 70711, sic 7560 ad 5346 sinum arcus
3gr.4min.52sec. scilices CEB.

Sit CB 7560, BA 12600, qualium BE 100000: Et sit primo DCE
45 gr. cujus sinus 70711. Vi ergo 100000 ad 70711, sic 7560 ad 5346 sinum,
arcus 3 gr. 4 min. 52. sec. scilicet CEB. Ausfer a 45 gr. restat CBE 41 gr. 55 mi.
8 sec. cujus dimidium 20 gr. 57 min. 34 sec. quem arcum tangit 38304. Et cum
sit EB 100000, BA vero 12600, differentia 87400 multiplicata in radium Et
divisa in summam 112600, prodit 77620. quod multiplica in superiorem tan-
gentem 38304. quod hic prodit, scilicet 29732, id tangit arcum 16 gr. 33 min.
30 sec. Hic ablati a superiore dimidio ipsius CBE, relinquit 4 gr. 24 min. 4 sec.
nempe angulum BEA.

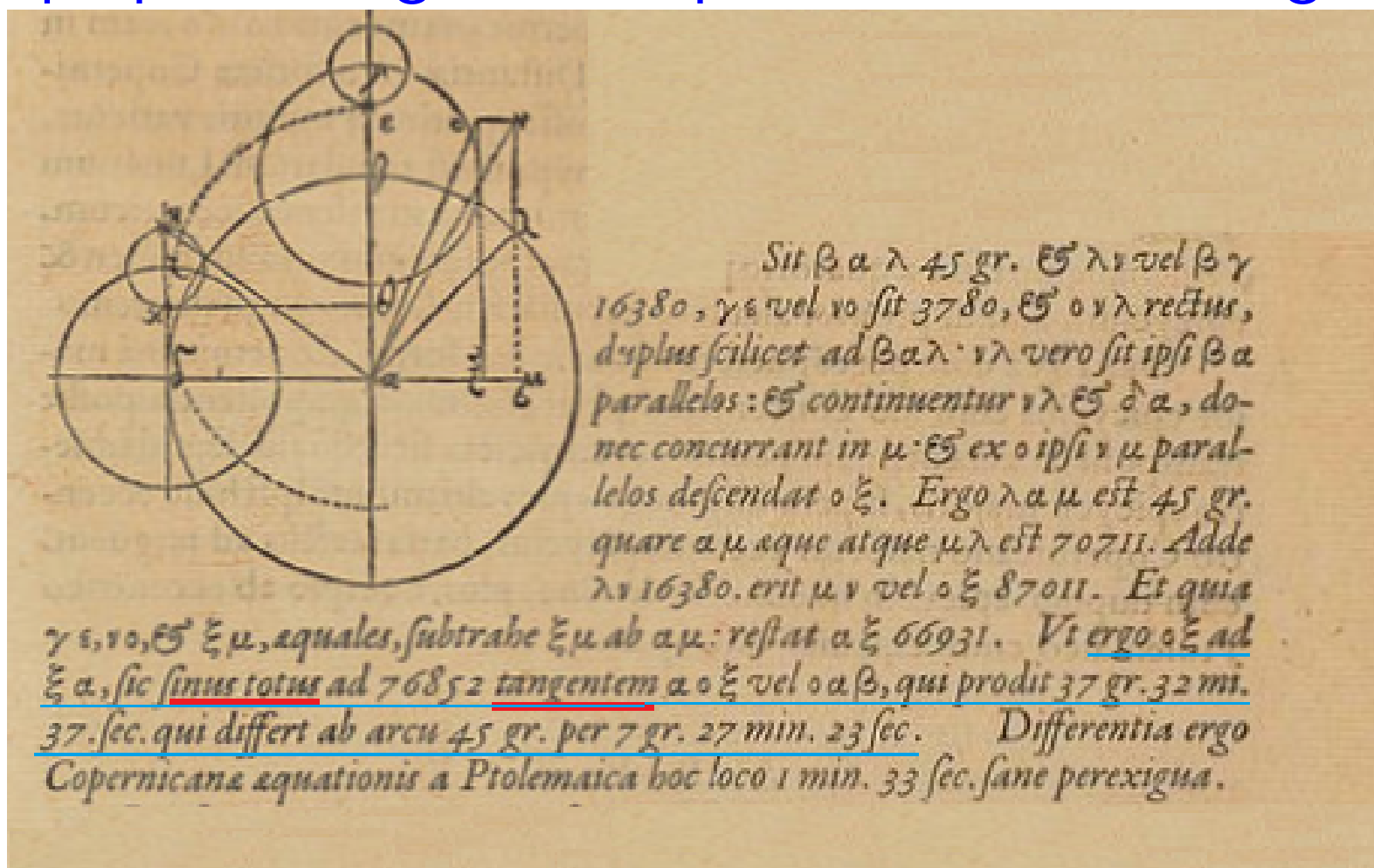
6 「新天文学」 第 1 部三角法の用例(6)

② 【正接4項比例→正接】 【正接→角】 (8-4)

○ ξ 対 ξ α は全正弦対 76852 となり 【正接4項比例→正接】、
これが角 α ○ ξ もしくは ○ α β の正接で、角度は 37°
 $32'37''$ となる 【逆正接→角】。これと 45° との差異は 7°
 $27'23''$ である。

6 「新天文学」 第1部三角法の用例(7)

- ① Vt ergo ox ad xa, sic sinus totus ad 76852 tangentem aox
..., qui prodit 37g32m37s qui differt ad arcu 45g. per



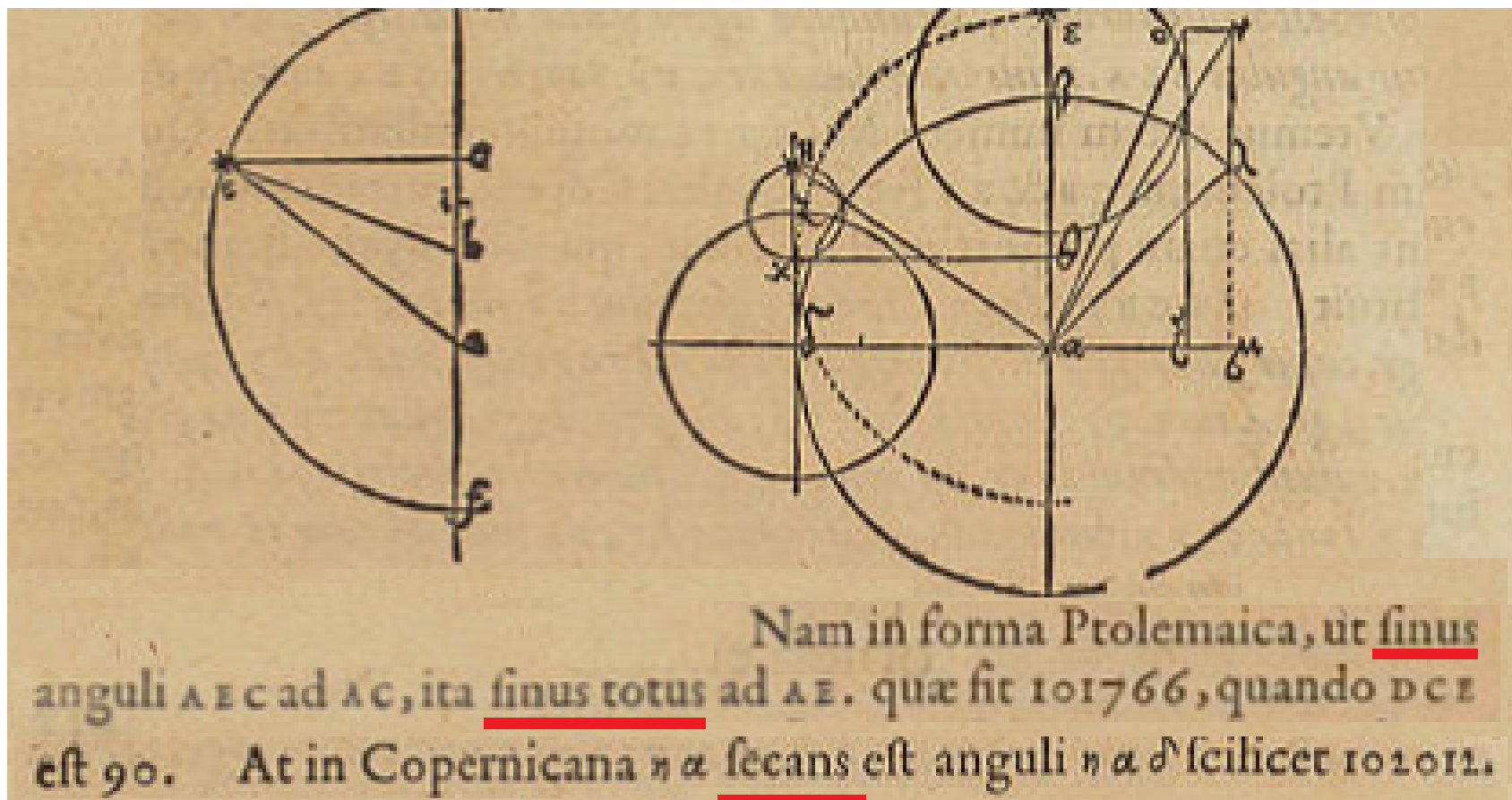
6 「新天文学」 第 1 部三角法の用例(8)

③【4項比例形正弦定理→正弦】 【正割4項比例→斜辺】 (10-4)

プトレマイオス説（図1）では、DCEが 90° の場合、角AECの正弦対ACが全正弦対AEに等しく、AEは101766になる【4項比例形正弦定理→正弦】。一方、コペルニクス説（図2）では、 $\eta \alpha$ は角 $\eta \alpha \delta$ の正割で102012になる【正割4項比例→斜辺】。

6 「新天文学」第1部三角法の用例(9)

① in ... Ptolemaica, ut sinus anguli AEC ad AC, ita sinus totus ad AE. quae sit 101766, ... At in Copernicana haec secans est anguli haec ... 101012.



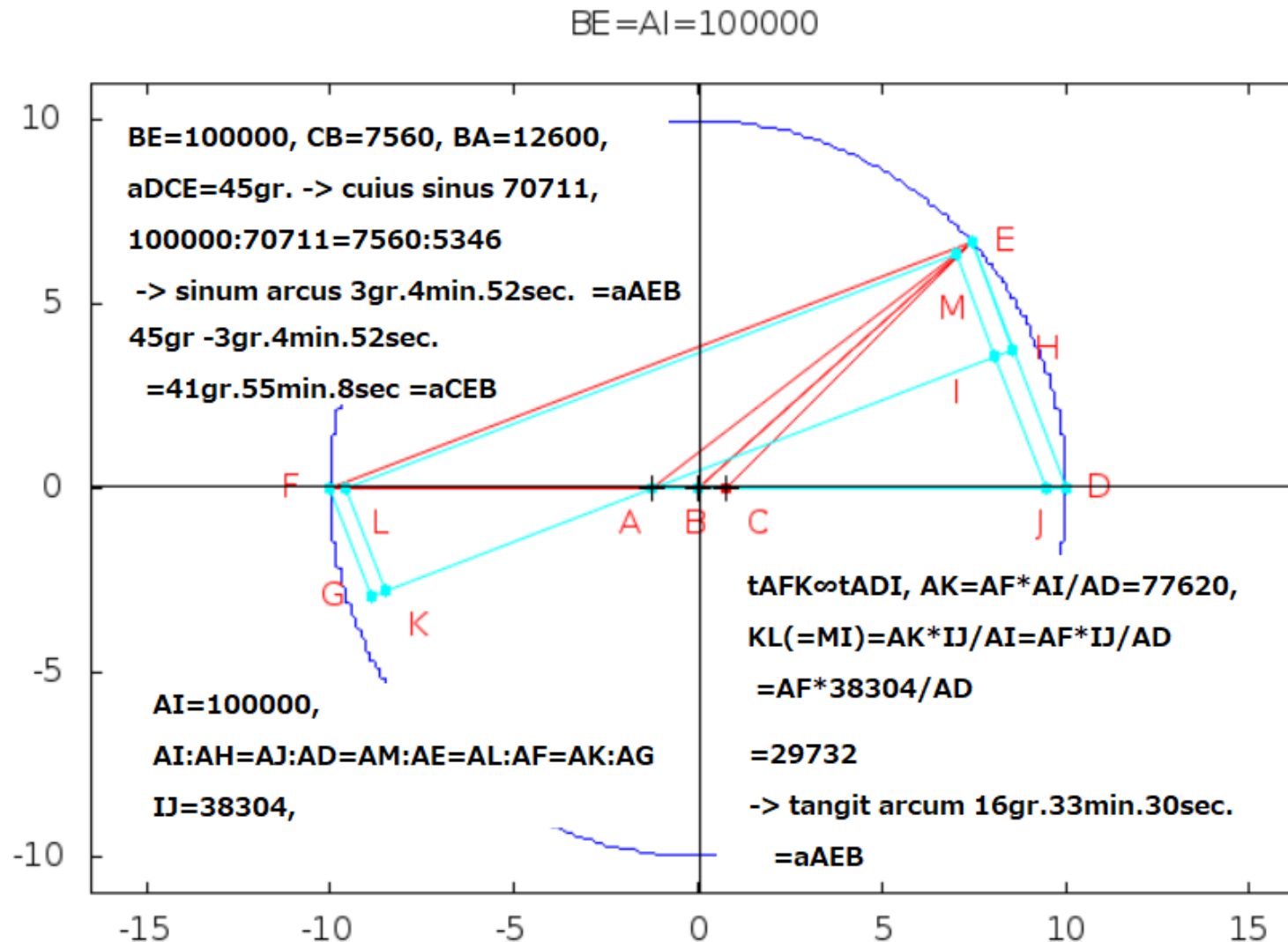
7 第7例中の計算の特徴

●既出6の続き

それ($3^{\circ} 4'52''$ 角 CEB)を 45° から引くと角 CBEの大きさ $41^{\circ} 55'8''$ が残る。この半分は $20^{\circ} 57'34''$ で、その正接は38304である。またEBが100000、BAが12600だから、その差は87400で、これを半径[100000]に掛けて[EBとBAの]総和の112600で割ると77620が得られる。これを先の38304に掛け(ると、その積は→て半径で割ると)29732となる。その逆正接は $16^{\circ} 33' 30''$ である。これを先の角CBEの半分から引くと $4^{\circ} 24'4''$ が残る。これが角BEAである。
(7-4)

7 第7例中の計算の特徴(2)

① 図形における逐次計算



7 第7例中の計算の特徴(3)

② 積・商2ステップの最短計算

● AF*3804/AD

今日的三角比による最短ステップは、

$$AF \cdot \sin FAG / (AD \cdot \cos A) = AF / AD \cdot \tan A$$

③ 三角比（比の値）と比べ、推論の見通しは不良

● 記述は混乱しているが、それにより推論過程を推定

8 「新天文学」第1部での比・三角法の扱い(結論)

- 当時最先端の天文研究をしていたケプラーでも、
比・三角法ともに、比例式で扱い、
比の値を用いた形跡なし
にもかかわらず、簡便な計算を工夫
ケプラー死後の Thesaurus mathematicus(1613)
においても、比の値の標記はない。
「新天文学」第1部の具体的計算例において、
正弦・正接・正割を明示した所では、明らかに長さ
数学者への援助要請の中に
ヴィエトを明示したものがある。ヴィエトを高く評価

8 比・三角法の扱い(結論)(2)

- ・ 背景

当時のヨーロッパ世界の制約

ガリレオも比の値は用いなかった。

比の値を連続量に対して用いることで、

原論の比例部分の書換を意図していた痕跡がある。

インド・アラビア世界では、比の値の扱いに寛容

10世紀以前にもあったようだ。

アラビア語からラテン語訳の原論の中に、

痕跡がある。

デカルトは「幾何学」で比の値を多項式の係数で使用

ニュートンは三角関数を冪級数展開

9 デカルト「幾何学」の比の扱い

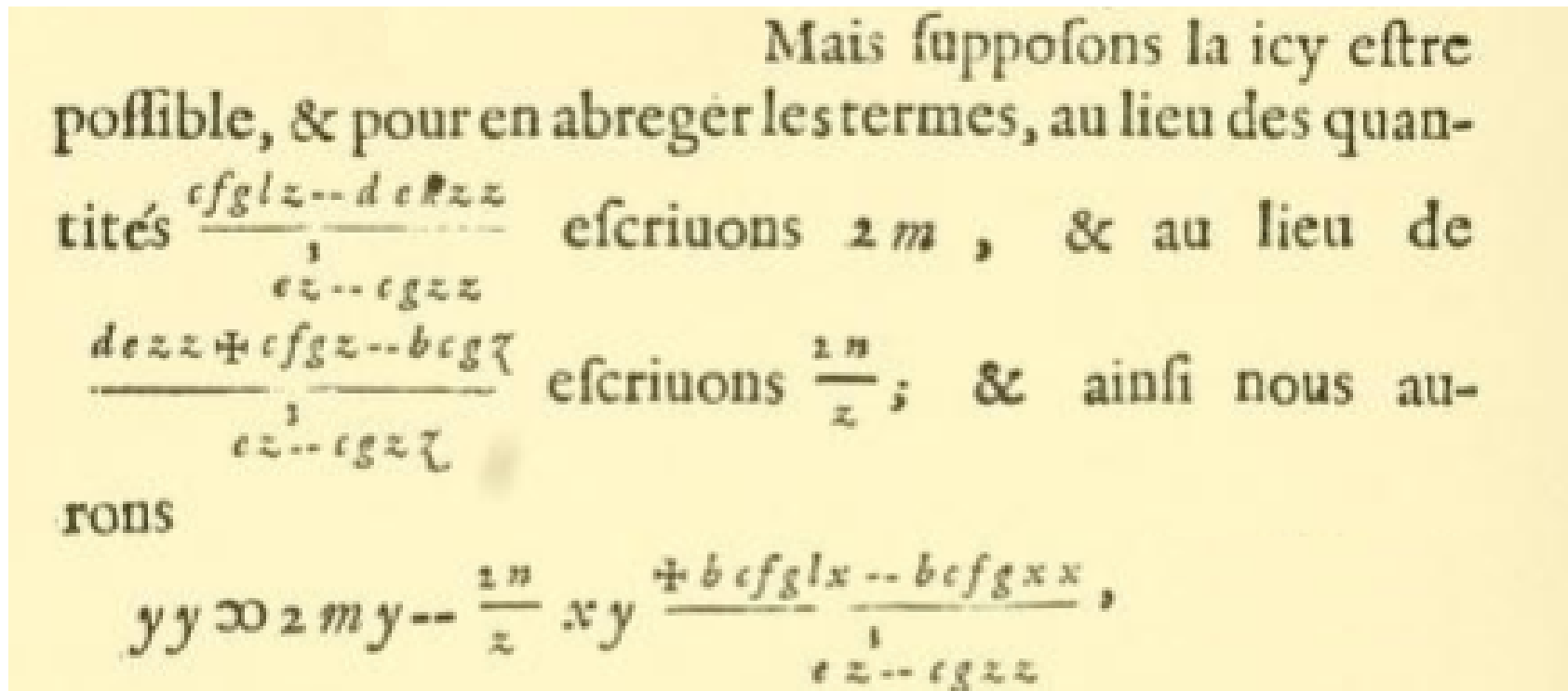
Puis ie tire auffy I L, en sorte que la ligne I K est à K L,
comme Z est à n . c'est a dire que I K estant x , K L est
 $\frac{n}{z}x$. Et par mesme moyen ie connois auffy la proportion
qui

65

<https://archive.org/stream/geometryofrene00desc#page/64/mode/2up>

- ・ $IK:KL = z : n$, $IK = x$
 $\rightarrow KL = \frac{n}{z} x$
- ・ デカルトは同質のもの^{の商}を認め、
比の値(デノミナティオ)・比例定数として
 x から独立させて、 $\frac{n}{z}$ と表記している。

9 デカルト「幾何学」での比の扱い(2)



<https://archive.org/stream/geometryofrene00desc#page/62/mode/2up>

- $\frac{cflgz - dekz^2}{eaz^3 - cgz^2} = 2m$ $\frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{eaz^3 - cgz^2} = \frac{2n}{z}$
- 比の値(デノミナティオ)・比例定数を文字で表す

10 まとめ

微分が、平均変化率 (x の増分と y の増分との比の値) の極限であるから、
比の値を係数として扱えるようにすること
の意義は大きい。

近世ヨーロッパで比・三角法における比の値の使用に関し
引き続き、ケプラー「新天文学」の第2部以降に
当たる予定である。

11 参考文献

- (1) Descartes, R. Geometrie(1637). *The Geometry of Rene Descartes(1925)*. trans. Smith, D. E. and Latham, M. L. The Open Court Publishing Company.
- (2) Danielson, D. The First Copernican(2006). 「コペルニクスの仕掛け人」 (2008). 訳田中康夫. 東洋書林
- (3) Katz, V. J. 「ルネッサンスの代数学」. 『カッツ数学の歴史』 (2005). 訳中根美知代他. 共立出版
- (4) Kepler. J. Astronomia Nova(1609). 「新天文学」 (2013). 訳岸本良彦. 工作舎. (<https://kda.clib.kindai.ac.jp/rarematerials/view/rarematerials/10165702>)

- (5) Mahoney, M. S. 「一七世紀における代数的思想の始原」. 『歴史における数学』 (1982). 訳佐々木力. 勁草書房
- (6) Merzbach, Uta C. and Boyer, Carl B. A History of Mathematics, Third Edition (2011). 「数学の歴史」. (2018). 監訳三浦伸夫、三宅克哉、訳久村典子. 朝倉書店
- (7) Pitiscus B. Thesaurus mathematicus (1613)
(<https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/5306414>)
- (8) 佐々木力. 「17世紀の科学革命と近代数学の始原」. 『数学史』 (2010). 岩波書店